

Centre d'Orsay

SÉRIE A,

N° D'ORDRE : 100

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Centre d'Orsay

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Mademoiselle Aimée BAILLETTE

PREMIÈRE THÈSE

Étude de quelques problèmes relatifs aux fonctions
approchables par des sommes d'exponentielles
et à la transformée de Fourier-Carleman
d'une fonction presque périodique

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 27 avril 1965 devant la Commission d'examen

MM. SCHWARTZ

Président

KAHANE
LESIEUR

}

Examineurs

Centre d'Orsay

SÉRIE A,

N° D'ORDRE : 100

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Centre d'Orsay

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Mademoiselle Aimée BAILLETTE

PREMIÈRE THÈSE

Étude de quelques problèmes relatifs aux fonctions
approchables par des sommes d'exponentielles
et à la transformée de Fourier-Carleman
d'une fonction presque périodique

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 27 avril 1965 devant la Commission d'examen

MM. SCHWARTZ

Président

KAHANE

LESIEUR

}

Examineurs



PROFESSEURS

Doyen... M. ZAMANSKY

MM.	BRELOT	T Analyse supérieure	Mlle	QUINTIN	T Physico chimie des radioéléments
	PRENANT	T Anatomie et histologie comparée		MONOD	T Electrochimie
	GRASSE	T Evolution des êtres organisés		BENOT	T Chimie du métabolisme
	PREVOST	T Chimie Organique		DE POSSEL	T Physico chimie (Orsay)
	WYART	T Minéralo. & Cristallo.		CHARLOT	T Analyse numérique
	TEISSIER	T Zoologie		LEMESE	T Chimie analytique
	MANGENOT	T Biologie végét. (Orsay)		GUERIN	T Ecologie végétale (Orsay)
	AUGER	T Physique quantique et relativité		CHATELET	T Chimie MPC (Orsay)
	MONNIER	T Physiologie générale		JEAN	T Chimie PCB
	PYVETEAU	T Paléontologie		MATTLER	T Physico nucléaire (Orsay)
	ROCARD	T Physique ENS		BERGEBARD	T Physique SPCN
	CARTAN	T Mathématiques ENS		BERTEIN	T Zoologie (Orsay)
	LAFFITTE N.	T Chimie générale		BOUSSIERES	T Electronique (Orsay)
	COULOMB	T Physique du globe	Mme	COUTURE	T Radiochimie
	COUSIN	T Biologie animale SPEN		ELLENBERGER	T Thermo. et méca. physique
	CHRETIEN	T Chimie minérale		FRANC	T Biologie des grandes régions du globe (Orsay)
	BOQUIET	T Zoologie		SCHNELL	T Chimie animale PCB
	KASTLER	T Physique ENS		STLKOWSKI	T Botanique tropicale
	EPHROSSI	T Génétique		ACHER	T Physiologie végétale
	RIVIERE	T Géologie SPEN & Sediment (Orsay)		BAUDON	T Chimie biologique
	GAUTHIERET	T Biologie végétale PCB		BEAUMONT	T Biologie animale PCB
	LUCAS R.	T Recherches Physiques		BLAMONT	T Chimie biologique
	TOMMAS A.	T Biologie cellulaire		BOUREAU	T Géophysique ionosphère
	ARNULF	T Optique appliquée		CURIE D.	T Botanique
	MORAND	T Physique enseignement		DURAND DELGA	T Physique MGP
	SOLELLET	T Physique PCB		PREON	T Tectonique
	FORTIER	T Mécanique exp. des fluides		HELLER	T Chimie organique (Orsay)
	DRACH	T Zoologie		TORRAT	T Physiologie végétale
	QUENEY	T Tectonique & Dynamique atmos.		CALLIEUX	T Calcul des probabilités
	GALLIEN	T Embryologie		MAIRAN	T Géologie SPEN
	EICHORN	T Botanique		DAUDEL	T Physique électricité
	DE CUGNAC	T Biologie végétale SPEN	Mlle	FOURCAY	T Mécanique ondulatoire appl. à la Chimie
	THELLIER	T Chimie physique		CHOUQUET BRUHAT	T Thém. & à la Phys. Nucléaire.
	L'HERITIER	T Physique du globe	Mme	VEIL	T Mécanique analytique et méca. céleste
	GRIVET	T Radiophysique Orsay		LWOFF	T Microbiologie
	PONCIN	T Radioélectricité Orsay	Mlle	SIESTRUNK	T Méca. phys. & expérimentale
	DU BREL	T Mécanique générale		LACOMBE	T Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	QUELET	T Arith. & Théorie des nombres		BRICHARD	T Physique PCB (Orsay)
	GAGNIARD	T Chimie organique		CABANNES	T Mécanique générale
	CHAMPETIER	T Géophysique appliquée		LESIEUR	T Math. I (Orsay)
	CUVILLIER	T Chimie macromoléculaire		MAZET	T Méca. générale (Orsay)
	JUNG	T Microbiologie		CAIRE	T Géographie physique et géo. dynamique
	TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.		COMOLET	T Méca. des fluides
	WIEMANN	T Chimie organ. & struc.		CORABOEUF	T Physiologie animale (Orsay)
	JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)		DELLOUE	T Physiologie animale (Orsay)
	VASSY	T Physique de l'atmosphère		GORENFLOT	T Botanique II (Orsay)
	DESTOUCHES	T Théorie physique		HOULLON	T Chimie animale PCB
	AMIEL	T Chimie générale		JULLIEN J.	T Chimie SPEN (Orsay)
	HOCART	T Minéralo. & Cristallo.		MALGRANGE	T Technique Math. de la physique (Orsay)
	MATHIEZ J. P.	T Physique optique		OLIVIER	T Antropologie
	COUTEAUX	T Cytologie		NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
	MAY	T Zoologie		BLANC-LA PIERRE	T Physique ENS (Orsay)
	CHOUQUET	T Théorie des fonctions et topologie		CHEVAUGNON	T Botanique
	FELDMANN	T Biologie végétale et topologie		KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
	GUNDER	T Physique des solides (Orsay)		SAMUEL	T Mathématiques ENS Supérieures
	JOST	T Physiologie comparée		KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
	FORTET	T Calcul des probabilités et Phys. Mathém.		THRY	T Méca. céleste
	SCHWARTZ	T Calcul diff. & intégral		ABELES	T Physique SPEN
	CHOUARD	T Physiologie végétale		AMAT	T Physique PCB
	MALAVARD	T Aviation (Tech. Aéron.)		AUBON	T Géologie
	NORMANT	T Synthèse organique	Mme	BENOT-GUEUTAL	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	BENARD	T Chimie minérale		BRUHAT	T Biologie marine Villefranche/mer
	BUVAT	T Botanique ENS		BRUNN	T Math. MPC
	DOUGE	T Statistique mathématiques		CHABRAL	T Géologie historique (Orsay)
	SOULAIRAC	T Physiologie Vég. Appl.		DEBIEUX	T Physique MGP (Orsay)
	ULRICH	T Optique théor. & appl.		DESPAGNAT	T Math. prop.
	MARICHAL	T Chimie chimie		FURON	T Physique théorique (Orsay)
	KIRHMANN	T Chimie minérale		GANG	T Géologie SPEN
	CHADEFAUD	T Botanique	Mme	GENEVES	T Géologie
	LE BRETON	T Physique de la nutrition		GUILBERT	T Biologie végétale PCB
	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie		HUPF	T Physique CUS Orléans
	DELLERS	T Anatomie & Histo. compar.		HOLLANDE	T Pétrographie
	EVISMANN	T Topologie algébrique		LIONS	T Biologie générale
	FRANCON	T Géométrie algébrique		MAITTE	T Analyse numérique
	GLANGEAUD	T Géographie phys. & géol.		MEYER	T Math. PCB
	GODEMENT	T Mathématiques MGP		PANIEL	T Physique propédeutique
	PISOT	T Technique math. de la phys.		ROSEAU	T Biologie générale
	ROCH	T Géologie		ROUBINE	T Pétrographie
	SCHATZMANN	T Astrophysique		SILBER	T Méca. théorique des fluides
	TERMER	T Géologie générale		UEBERSFELD	T Electronique
	ZAMANSKY	T Mathématiques générales		YVON	T Chimie PCB
	LENNUIER	T Physique MGP		HERVE	T Chimie PCB
	RIZET	T Génétique Orsay		NERON	T Théories physiques
	ROUTHIER	T Géologie appliquée		PECKER WIMEL	T Mathématiques
	TORNELAT	T Physique théorique	Mme	BALKANSKY	T Physique théorique (Orsay)
	DDMER	T Mathématiques MPC		LE CORRE	T Astrophysique
	SOUCHAY	T Chimie générale		DELROCH	T Physique MPC
	AIGRAIN	T Electrochimie générale		GOURDIN	T Electricité
	BRUSSET	T Chimie systématique		LEHMANN	T Physique théorique (Orsay)
	LEVY M.	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)		NATAP	T Physique des hautes énergies
	CHAX	T Chimie biologique (Orsay)		ECHALLER	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	HUREL PY	T Chimie générale		BARBAUD	T Chimie animale PCB
	PAINETTER	T Chimie minérale		LICKET	T Physiologie cellulaire
	BRUN	T Biologie végétale PCB		DARS	T Physiologie végétale (Orsay)
	LEDERER	T Chimie générale		CAMEFORT	T Géologie structurale et Géologie appliquée
	DUBREIL	T Chimie minérale		VICHNEVSKY	T Botanique (agrégation)
	LELONG	T Chimie biologique (Orsay)		ELAQUIERE	T Mécanique industrielle
	BELLAIR	T Mathématiques II ENS		ARNOUS	T Electronique (Orsay)
	COITE	T Géologie SPEN		TABOUT	T Physique théorique
	DUBOIS J. E.	T Physique électricité		MALLAVIN	T Chimie (CSU Orléans)
	LAMOTTE	T Chimie organique		GAUDEMAR	T Mathématiques prop. (Orsay)
	MICHEL A.	T Chimie minérale Orsay		PEREZ Y JORBA	T Chimie prop.
	OLMER	T Energétique générale		ROUSSE	T Physique Exp. des hautes énergies (Orsay)
	ROGAULT	T Electricité (Orsay)		ROSCHE	T Chimie (agrégation Orsay)
	GAUTHIER	T Mécanique appliquée		GUY	T Mécanique théorique
	BARCHIEWITZ	T Chimie physique		LAZARD	T Astronomie
	BROSSEL	T Physique atomique		MOREL P.	T Physique expérimentale
	BUSER	T Physiologie comparée		ARSAC	T Math. MPC
	CAMUS	T Physiologie générale		LEFEVRE	T Physique MPC
	CASTANG	T Physiologie végétale		CHAPVILLE	T Programmation
	MOYSE	T Physique II Thermo (Orsay)		RENOT	T Chimie MPC
	CHARNIAUX-	T Minéralo. & cristall.		RIO	T Biochimie
	COTTON	T Physiologie végétale (Orsay)		JAUSEIN	T Physique CPEN
	POSSOMES	T Evolution des êtres organisés		PREVOST G.	T Chimie CPEN
	PULLMANN	T Zoologie		FAVARD P.	T Géologie ENS
	TEILLAC	T Chimie quantique		VILKAS	T BV CPEN
	TORNELAT	T Physique Nucl. & radioactivité (Orsay)		FICINI	T BA CPEN
	VILLE	T Biol. Physico-chim. (Orsay)		LEQUEUX	T Chimie CPEN
	WILLEMART	T Econométrie		COKEN TANDOUJ	T Astronomie
	DODE	T Chimie PCB		TAVERNIER	T Physique CPEN
	DOE	T Chimie (Orsay)		DURAND M.	T Physique CPEN
	FREYMAN	T Recherches physiques		PASCAUD	T BA SPEN
	GUINCHET	T Biologie végétale SPEN (Orsay)		PETIT	T Physiologie
	ROLLET	T Chimie minérale		BRUSSE	T BA CPEN
	JOREN	T Chimie SPEN		CAGNIAC	T Géologie (Orsay)
	CHEVALLEY	T Géométrie algèbre et théorie des groupes		LEBERRE	T Mathématiques agrégation (Orsay)
	ARNOLUT	T Electronique Orsay		SCHREFFER	T Zoologie (Orsay)
	CHAPPELLE	T Physique I (Orsay)		DE GENNES	T Microbiologie (Orsay)
	DELANGE	T Mathématiques I (Orsay)		RIQU	T Chimie des solides (Orsay)
	DENY	T Mathématiques générales (Orsay)		CLAUSER	T Physique nucléaires exp. (Orsay)
	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides		CHVALIER	T Chimie biologique (Orsay)
	LUCAS	T Géologie		JANCOTTE	T Physiologie animale (Orsay)
	ALLARD	T Chimie physique		FALK-VAIRANT	T Physique atomique (Orsay)
	BENTHELOT	T Physique des particules fondamentales (Orsay)		FETIZON	T Chimie nucléaire (Orsay)
	BRICARD	T Météor. et physique de l'atmosphère		CERF	T Chimie prop. (Orsay)
	ALCARE	T Psycho-physio.			T Mathématiques (Orsay)
	FRIEDL	T Physique des solides (Orsay)			
	JULIA M.	T Etudes des molécules complexes			
	LENDER	T Biologie animale SPEN (Orsay)			

Secrétaire général... R. POULAIN

**ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS
AUX FONCTIONS APPROCHABLES
PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES
ET A LA TRANSFORMÉE DE
FOURIER-CARLEMAN
D'UNE FONCTION PRESQUE PÉRIODIQUE**

par AIMÉE BAILLETTE

Introduction

La première partie de ce travail, parue au Journal d'Analyse Mathématique sous le titre « Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles » (vol. X, 1962-1963, p. 91-115) est l'étude du prolongement dans certains domaines Δ , de fonctions holomorphes dans un ouvert, approchables par des sommes d'exponentielles dont les exposants appartiennent à une suite donnée Λ . La méthode de prolongement utilisée est due à J. P. Kahane (Ann. Inst. Fourier, V, 1953-1954, p. 39-130). Pour étudier les domaines Δ nous avons défini « l'indice de saturation » de la suite Λ (coefficient directement lié à la forme des domaines Δ); nous avons aussi établi et utilisé quelques propriétés des produits canoniques. Les résultats obtenus pour les fonctions holomorphes nous ont permis d'obtenir des résultats concernant les fonctions approchables sur un segment de droite par des sommes d'exponentielles.

Les deux chapitres qui suivent cette introduction sont consacrés à d'autres problèmes. Dans le chapitre I nous avons cherché une caractérisation des suites Λ de nombres réels (suites (P)) qui sont le spectre d'une fonction presque périodique indéfiniment dérivable, dont toutes

les dérivées sont presque périodiques et qui a pour transformée de Fourier-Carleman l'inverse du produit canonique qui s'annule sur la suite Λ . Les fonctions presque périodiques associées aux suites (P) ont des propriétés remarquables que nous étudions au chapitre I et que nous utilisons dans les démonstrations du chapitre II. Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de deux problèmes distincts. Le premier est relatif à l'approximation pondérée des fonctions continues sur la droite réelle par des polynômes ou des sommes d'exponentielles imaginaires. Cette étude nous a été inspirée par un travail de P. Koosis ⁽¹⁾. Le deuxième problème est relatif au prolongement dans tout le plan d'une fonction de deux variables réelles indéfiniment dérivable dans un demi-plan fermé.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à M. Kahane qui a accepté de diriger ce travail; qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma gratitude pour l'aide qu'il m'a apportée, ses conseils et ses encouragements constants.

Je remercie également M. Schwartz qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury et M. Lesieur qui a bien voulu me proposer le sujet de deuxième thèse.

(1) Sur l'approximation pondérée par des polynômes et par des sommes d'exponentielles imaginaires. *Ann. Scien. Ec. Norm. Sup.* (1964), 81 (3), 387-408.

CHAPITRE I

SUR LA TRANSFORMÉE DE FOURIER-CARLEMAN D'UNE FONCTION PRESQUE PÉRIODIQUE DE SPECTRE DONNÉ

Nous nous proposons d'étudier une classe particulière de suites de nombres réels, la classe des suites (P).

Soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite de nombres réels distincts non nuls, à laquelle nous supposons que l'on peut associer un produit canonique

$$C_{\Lambda}(w) = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{w}{\lambda_k}\right).$$

Nous dirons que Λ est une suite (P) si la fonction $1/C_{\Lambda}(w)$ est la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction f_{Λ} presque périodique indéfiniment dérivable, dont toutes les dérivées sont presque périodiques.

Des exemples de suites (P) ont déjà été étudiés dans [6] (p. 65-69) et [7] (lect. 22) où l'on montre que pour certaines de ces suites, la fonction presque périodique associée jouit de propriétés extrémales dans la classe des fonctions moyennes périodiques dont le spectre est contenu dans la suite considérée.

Dans ce qui suit, le paragraphe 1 est consacré à l'étude de quelques propriétés des suites (P) et de la fonction presque périodique associée. Aux paragraphes 2 et 3 nous indiquons un moyen simple de construire des suites (P) et nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit une suite (P).

1. Quelques propriétés des suites (P).

Rappelons quelques résultats relatifs aux suites (P) ([6], p. 65). Si Λ est une suite (P) on a

$$f_{\Lambda}(x) = -i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_k x}}{C'_{\Lambda}(\lambda_k)},$$

$$f_{\Lambda}^{(n)}(0) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C'_{\Lambda}(\lambda_k) \lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Pour

$$w = u + iv, \quad v \neq 0,$$

$$\frac{1}{C_{\Lambda}(w)} = \int_{-\infty}^0 f_{\Lambda}(x) e^{-ixw} dx \quad \text{si } v > 0,$$

$$\frac{1}{C_{\Lambda}(w)} = - \int_0^{\infty} f_{\Lambda}(x) e^{-ixw} dx \quad \text{si } v < 0,$$

d'où

$$\left| \frac{w^n}{C_{\Lambda}(w)} \right| \leq \frac{1}{|v|} \sup_x |f_{\Lambda}^{(n)}(x)| = \frac{M_n}{|v|} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Remarque 1.1. — Soient λ_k et $\lambda_{k'}$ deux termes de la suite Λ tels que l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k'}[$ ne contienne pas de points de la suite Λ . La fonction

$$\Phi(w) = \frac{w^n (w - \lambda_k) (w - \lambda_{k'})}{C_{\Lambda}(w)}$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle de diamètre $[\lambda_k, \lambda_{k'}]$ ainsi que sur ce cercle. Elle est bornée sur ce cercle car

$$|\Phi(w)| \leq \frac{M_n}{|v|} |w - \lambda_k| |w - \lambda_{k'}| = M_n |\lambda_k - \lambda_{k'}|.$$

$\Phi(w)$ est bornée par le même nombre à l'intérieur du cercle; d'où, pour $\lambda_k \leq u \leq \lambda_{k'}$,

$$|C_{\Lambda}(u)| \geq \frac{|u^n| (u - \lambda_k) (\lambda_{k'} - u)}{M_n (\lambda_{k'} - \lambda_k)}$$

Nous utiliserons cette remarque pour démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — Soient $\Lambda = (\lambda_k)$ et $\Gamma = (\gamma_k)$ deux suites (P) telles que :

$$|\lambda_k - \gamma_{k'}| \geq h > 0 \quad \text{quels que soient } k \text{ et } k'. \quad (1.1)$$

La réunion Ω des suites Λ et Γ est une suite (P).

Démonstration. — Il suffira de prouver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C'_{\Omega}(\gamma_k) \gamma_k^{-n}| = \infty \quad (1.2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C'_n(\lambda_k) \lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

On a

$$C'_n(\gamma_k) = C_\Lambda(\gamma_k) C'_r(\gamma_k).$$

Soit $\lambda_{k'} < \gamma_k < \lambda_{k''}$, l'intervalle $]\lambda_{k'}, \lambda_{k''}[$ ne contenant pas de point de la suite Λ . D'après la remarque 1.1 et l'hypothèse (1.1)

$$|C_\Lambda(\gamma_k)| \geq \frac{|\gamma_k^n| h(\lambda_{k''} - \lambda_{k'} - h)}{M_n(\lambda_{k''} - \lambda_{k'})} \geq \frac{|\gamma_k^n|}{M_n} \frac{h}{2}.$$

Γ étant une suite (P),

$$|C'_r(\gamma_k)| \geq A_n |\gamma_k^n|;$$

donc

$$|C'_n(\gamma_k)| \geq B_n |\gamma_k^{2n}| \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ce qui prouve (1.2). On démontre de même (1.3).

Remarquons que la conclusion du théorème 1.1 subsiste si l'on remplace l'hypothèse (1.1) par

$$\inf_{k'} |\lambda_k - \gamma_{k'}| \geq \frac{h}{|\lambda_k|^\alpha} \text{ et } \inf_{k'} |\lambda_{k'} - \gamma_k| \geq \frac{h}{|\gamma_k|^\alpha}$$

α et h étant des constantes positives.

THÉORÈME 1.2. — *Si la suite Λ est une suite (P) elle est mesurable; sa densité est égale à la densité effective de Beurling et Malliavin.*

Démonstration. — Si Λ est une suite (P), la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C'_\Lambda(\lambda_k)}$ est absolument convergente. Il résulte d'un théorème de Krein ([11], p. 258-259) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |C_\Lambda(x)|}{1+x^2} dx < \infty; \quad (1.4)$$

la suite Λ est donc mesurable ([10] et [11], p. 251); nous désignerons sa densité par D .

D'après un théorème de Beurling et Malliavin ([3], p. 292, [8] et [12]) l'inégalité (1.4) entraîne que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction entière $M(w)$, de type exponentiel inférieur à ε , bornée sur l'axe réel, telle que $C_\Lambda(w) M(w)$ soit aussi une fonction entière de type exponentiel bornée sur l'axe réel. Le type de cette fonction ne dépasse pas

$\pi D + \varepsilon$. On peut définir la densité effective D_e de la suite Λ de la manière suivante (voir [12]) : πD_e est la borne inférieure des types des fonctions entières de type exponentiel, bornées sur l'axe réel, nulles sur Λ . On a donc $\pi D_e \leq \pi D + \varepsilon$. On sait aussi que $\pi D \leq \pi D_e$ ([8]); donc $D = D_e$.

THÉORÈME 1.3. — Si Λ est une suite (P) de densité D , la fonction presque périodique associée f_Λ est nulle sur l'intervalle $[-\pi D, \pi D]$.

Démonstration. — Soit $|t| < \pi D$; considérons la fonction

$$f(x) = f_\Lambda(x + t) = -i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t\lambda_k(x+t)}}{C'_\Lambda(\lambda_k)}.$$

Sa transformée de Fourier-Carleman

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t\lambda_k t}}{C'_\Lambda(\lambda_k)(w - \lambda_k)} = \frac{G(w)}{C_\Lambda(w)},$$

est bornée hors des cercles de rayon r arbitraire, centrés aux points λ_k ; $G(w)$ est donc une fonction entière de type exponentiel dont l'indicatrice $h_G(\theta)$ satisfait l'inégalité

$$h_G(\theta) \leq h_{C_\Lambda}(\theta) = \pi D |\sin \theta|.$$

La fonction

$$E(w) = \frac{e^{itw}}{C_\Lambda(w)} - F(w) = \frac{e^{itw} - G(w)}{C_\Lambda(w)}$$

est entière de type exponentiel nul; en outre

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} |E(iv)| = 0;$$

donc, d'après [4] (p. 169), $E(w) \equiv 0$; d'où

$$F(w) = \frac{e^{itw}}{C_\Lambda(w)}.$$

On verrait de même que $f'(x)$ a pour transformée de Fourier-Carleman

$$i w F(w) = \frac{i w e^{itw}}{C_\Lambda(w)}.$$

On a donc pour $v > 0$

$$F(iv) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{v x} dx = \frac{f(0)}{v} - \frac{1}{v} \int_{-\infty}^0 f'(x) e^{v x} dx = \frac{f(0)}{v} + F(iv).$$

On en déduit que $f(0) = 0$, c'est-à-dire $f_{\Lambda}(t) = 0$ pour $|t| < \pi D$; par continuité on a $f_{\Lambda}(t) = 0$ pour $|t| \leq \pi D$.

Soit $E(\Lambda)$ la classe des fonctions presque périodiques, indéfiniment dérivables, de spectre contenu dans Λ , dont toutes les dérivées sont presque périodiques. La démonstration du théorème 1.3 montre que f_{Λ} n'est pas la seule fonction de $E(\Lambda)$ nulle à l'origine avec toutes ses dérivées. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. — Soit $f \in E(\Lambda)$, Λ étant une suite (P). Pour que $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), il faut et il suffit que la transformée de Fourier-Carleman de f soit égale à $G(w)/C_{\Lambda}(w)$, $G(w)$ étant une fonction entière de type exponentiel telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{G(\lambda_k) \lambda_k^n}{C'_{\Lambda}(\lambda_k)} \right| < \infty \quad (1.5)$$

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \left| \frac{G(iv) v^n}{C_{\Lambda}(iv)} \right| = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log + |G(u)|}{1 + u^2} du < \infty \quad (1.7)$$

Démonstration. — On sait que ces conditions sont suffisantes ([5]). Montrons qu'elles sont aussi nécessaires :

Les inégalités (1.5) résultent du fait que $f \in E(\Lambda)$. D'autre part pour $w = u + iv$, $v > 0$ on a

$$\frac{G(w)}{C_{\Lambda}(w)} = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{(iw)^n} \int_{-\infty}^0 f^{(n)}(x) e^{-iwx} dx ;$$

d'où

$$\left| \frac{w^n G(w)}{C_{\Lambda}(w)} \right| \leq \frac{1}{|v|} \sup_w |f^{(n)}(x)| = \frac{A_n}{|v|} ;$$

la même inégalité vaut pour $v < 0$, d'où (1.6). Enfin, on vient de voir que pour $v \neq 0$

$$|G(u + iv)| \leq \frac{A_0}{|v|} |C_{\Lambda}(u + iv)| ;$$

donc pour $|v| \leq 1$, $v \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log + |G(u + iv)|}{1 + u^2} du \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log + |C_{\Lambda}(u + iv)|}{1 + u^2} du + K_1 \log \frac{1}{|v|} ;$$

or d'après [10] et [11] (p. 258-261)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log + |G(u + iv)|}{1 + u^2} du \leq K_2 \log \frac{1}{|v|} + K_3;$$

on en déduit comme dans [11] (p. 262) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log + |G(u)|}{1 + u^2} du < \infty,$$

ce qui démontre (1.7).

Remarque 1.2. — La fonction

$$\frac{G(w)}{C_{\Lambda}(w)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_k)}{C'_{\Lambda}(\lambda_k)(w - \lambda_k)}$$

est bornée hors des cercles de rayon r arbitraire, centrés aux points de la suite Λ ; donc

$$h_G(\theta) \leq \pi D |\sin \theta|,$$

D étant la densité de la suite Λ . D'après [11] (p. 251) $h_G(\theta)$ est de la forme

$$h_G(\theta) = \pi \Delta |\sin \theta| - \alpha \sin \theta \quad (\Delta \geq 0, \alpha \text{ réel});$$

donc

$$\pi \Delta \pm \alpha \leq \pi D.$$

Soit $G_1(w) = e^{iBw} G(w)$, $|\alpha + \beta| < \pi D - \pi \Delta$. D'après le théorème 1.4, $G_1(w)/C_{\Lambda}(w)$ est la transformée de Fourier-Carleman de la fonction $f_1(x) = f(x + \beta)$, telle que $f_1(0) = 0$; f est donc nulle sur l'intervalle $[-\pi D + \pi \Delta - \alpha, \pi D - \pi \Delta - \alpha]$.

2. Suites (P) symétriques.

Soit $\Lambda = (\pm \lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$, une suite symétrique; nous supposons la suite (λ_k) positive, croissante, de densité supérieure finie. A chaque terme λ_k associons le point A_k de coordonnées (k, λ_k) . Soit a_k l'abscisse du point d'intersection de la droite $A_k A_{k+1}$ avec l'axe réel :

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{k + 1 - a_k}{k - a_k}.$$

THÉORÈME 2.1.

1°) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$, Λ est une suite (P);

2°) Si $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k < \infty$, Λ n'est pas une suite (P).

Ce théorème montre en particulier que si la ligne polygonale L , ayant pour sommets les points A_k , est convexe et n'a pas d'asymptote, Λ est une suite (P); si L est concave, Λ ne peut pas être une suite (P).

Pour que Λ soit une suite (P) il est nécessaire et suffisant que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C'_\Lambda(\lambda_k) \lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

le théorème 2.1 est donc une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 2.1. — Si la suite Λ est telle que

$$\frac{p+1}{2} < \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k < \frac{q+1}{2},$$

p et q étant deux entiers relatifs, pour $k > k_0(p, q)$ on a

$$K_1 \lambda_k^p \leq |C'_\Lambda(\lambda_k)| \leq K_2 \lambda_k^q,$$

K_1 et K_2 étant deux constantes qui dépendent respectivement de p et q .

Démonstration. — Nous nous bornerons à démontrer la deuxième inégalité, la première se démontrant de manière analogue.

Pour $k > k_0(q)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} &< \frac{k+1 - \frac{q+1}{2}}{k - \frac{q+1}{2}} \\ |C'_\Lambda(\lambda_k)| &= \frac{2}{\lambda_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| 1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2} \right| \\ &\leq A_1 \lambda_k^{2k_0-1} \prod_{\substack{j=1+k_0 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{k - \frac{q+1}{2}}{j - \frac{q+1}{2}} \right)^2 \right|. \end{aligned}$$

Pour q impair on a

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k - \frac{q+1}{2}}}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{k - \frac{q+1}{2}}{j} \right)^2 \right| = \frac{1}{2},$$

et pour q pair

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k - \frac{q}{2}}}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{k - \frac{q+1}{2}}{j - \frac{1}{2}} \right)^2 \right| = \frac{\pi}{2} \left| k - \frac{q+1}{2} \right|.$$

On en déduit

$$|C'_\Lambda(\lambda_k)| \leq A_2 \lambda_k^{2k_0-1} k^{q+1-2k_0} \leq K_2 \lambda_k^q.$$

THÉORÈME 2.2. — Soient $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ et $\Gamma = (\pm \gamma_k)$ deux suites symétriques telles que :

$$|\lambda_k - \gamma_{k'}| \geq h > 0 \quad \text{quels que soient } k \text{ et } k',$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b > -\infty \quad \text{avec} \quad \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{k+1-b_k}{k-b_k}.$$

Si Λ est une suite (P), la réunion Ω des suites Λ et Γ est une suite (P).

Démonstration. — 1°) $C'_\Omega(\gamma_k) = C_\Lambda(\gamma_k) C'_\Gamma(\gamma_k)$.

On démontre comme dans le théorème 1.1 l'inégalité

$$|C_\Lambda(\gamma_k)| \geq \frac{\gamma_k^n}{M_n} \frac{h}{2}.$$

D'après le lemme 2.1, si p est entier relatif tel que $\frac{p+1}{2} < b$, on a pour $k > k_0(p)$

$$|C'_\Gamma(\gamma_k)| \geq K_1 \gamma_k^p;$$

d'où

$$|C'_\Omega(\gamma_k)| \geq \frac{K_1 h}{2 M_n} \gamma_k^{n+p} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

2°) $C'_\Omega(\lambda_k) = C'_\Lambda(\lambda_k) C_\Gamma(\lambda_k)$.

Cherchons une minoration de

$$|C_\Gamma(\lambda_k)| = \prod_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\lambda_k^2}{\gamma_j^2} \right|.$$

Soit $\gamma_{k'} < \lambda_k < \gamma_{k'+1}$ et soit q un entier relatif tel que $q + 1 < b$.
 Pour $k > k_0(q)$ et $j_0(q) < j < k'$, on a, d'après l'hypothèse,

$$\frac{\lambda_k}{\gamma_j} > \frac{\gamma_{k'}}{\gamma_j} \geq \frac{k' - q}{j - q};$$

pour $j > k' + 1$

$$\frac{\lambda_k}{\gamma_j} < \frac{\gamma_{k'+1}}{\gamma_j} < \frac{k' - q}{j - q - 1};$$

enfin

$$\left| 1 - \frac{\lambda_k^2}{\gamma_{k'}^2} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_k^2}{\gamma_{k'+1}^2} \right| \geq \frac{2h(\gamma_{k'+1} - \gamma_{k'} - h)}{\gamma_{k'} \gamma_{k'+1}} \geq \frac{A_1}{\lambda_k^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |C_r(\lambda_k)| &\geq A_2 \lambda_k^{2j_0-2} \prod_{\substack{j=j_0+1 \\ j \neq k'}}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{k' - q}{j - q} \right)^2 \right| \\ &\geq A_3 \lambda_k^{2j_0-2} k'^{2q-2j_0}. \end{aligned}$$

Λ étant une suite (P),

$$|C_\Lambda(\lambda_k)| \geq A_n \lambda_k^n;$$

donc

$$|C'_n(\lambda_k)| \geq K_n \lambda_k^{n+2q-2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

ceci achève de démontrer le théorème 2.2.

Le théorème 2.1 permet de construire des suites (P) symétriques mais ne donne pas une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite Λ soit une suite (P). Il existe en effet des suites (P) symétriques telles que

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty.$$

Ainsi la suite symétrique

$$\lambda_{2k-1} = 2^k, \quad \lambda_{2k} = 2^k + 1 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

est une suite (P) telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \infty.$$

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la suite symétrique Λ soit une suite (P) est que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \lambda_k} \int_0^1 \frac{t + \lambda_k \left[D(\lambda_k t) - D\left(\frac{\lambda_k}{t}\right) \right]}{1 - t^2} dt = \infty,$$

$D(t)$ étant la fonction de densité de la suite Λ

$$D(t) = \frac{1}{t} \sum_{0 < \lambda_k < t} 1.$$

Ce théorème résulte des lemmes suivants :

LEMME 2.2. — *Soit r un nombre réel positif n'appartenant pas à la suite Λ ; on a*

$$\log |C_\Lambda(r)| = 2r \int_0^1 \frac{D(rt) - D\left(\frac{r}{t}\right)}{1 - t^2} dt.$$

Ce lemme est démontré dans [9] (p. 127).

LEMME 2.3. — *Soit*

$$\Lambda_k = \Lambda - \{\lambda_k\} - \{-\lambda_k\}.$$

On a

$$\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)| = 2 \int_0^1 \frac{t + \lambda_k \left[D(\lambda_k t) - D\left(\frac{\lambda_k}{t}\right) \right]}{1 - t^2} dt.$$

Pour démontrer ce lemme il suffit d'appliquer le lemme 2.2 au produit canonique associé à la suite Λ_k . La fonction de densité de cette suite est en effet

$$\begin{aligned} D(t) - \frac{1}{t} & \quad \text{pour} \quad t > \lambda_k, \\ D(t) & \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \lambda_k. \end{aligned}$$

Le théorème 2.3 découle du lemme 2.3. En effet pour que Λ soit une suite (P) il faut et il suffit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C_\Lambda(\lambda_k) \lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)|}{\log \lambda_k} = \infty.$$

Remarque 2.1. — Il est plus facile de démontrer directement les théorèmes 2.1 et 2.2 que de les déduire du théorème 2.3.

Remarque 2.2. — Si $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ est une suite (P) symétrique, la suite (λ_k) a un indice de condensation nul. En effet, Λ étant mesurable, d'après [2] (p. 25-27), son indice de condensation est

$$\delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \log \left| \frac{1}{C_{\Lambda}(\lambda_k)} \right|;$$

comme l'indice de condensation n'est pas négatif et que $|C'_{\Lambda}(\lambda_k)|$ reste supérieur à un nombre positif, on a $\delta = 0$.

3. Suites (P) non symétriques.

Nous allons établir un théorème analogue au théorème 2.3 pour les suites Λ non symétriques.

THÉORÈME 3.1. — Soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite mesurable. Pour que Λ soit une suite (P) il faut et il suffit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\log |\lambda_k|} \int_0^1 \left[|\lambda_k| \varphi(\lambda_k, t) + \frac{1}{1-t} \right] dt = \infty$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) = & \frac{D(rt)}{1-t} + \frac{D(-rt)}{1+t} - \\ & - \frac{1}{t} D\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t} D\left(-\frac{r}{t}\right) \frac{1}{1+t}, \end{aligned}$$

$D(t)$ étant la fonction de densité de la suite Λ

$$D(t) = \frac{n(t)}{t};$$

$$n(t) = \sum_{0 < \lambda_k < t} 1 \quad \text{si } t > 0, \quad n(t) = \sum_{t < \lambda_k < 0} (-1) \quad \text{si } t < 0.$$

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3.1. — Soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite mesurable et soit r un nombre réel n'appartenant pas à Λ . On a

$$\log |C_\Lambda(r)| = |r| \int_0^1 \varphi(r, t) dt.$$

Démonstration. — On a

$$|\log C_\Lambda(r)| = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \log \left| 1 - \frac{r}{t} \right| dn(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} I(R).$$

Soit $|r| = \rho$, $r = \rho\alpha$, et soit β tel que $0 < \beta < 1$. Pour β assez voisin de 1 on a

$$I(R) = \int_{-R}^{-\rho/\beta} + \int_{-\rho/\beta}^0 + \int_0^{\rho\beta} + \int_{\rho/\beta}^R \log \left| 1 - \frac{r}{t} \right| dn(t) + \delta(r),$$

en posant $\delta(r) = 0$ si $-r \notin \Lambda$ et $\delta(r) = \log 2$ si $-r \in \Lambda$. En intégrant par parties on obtient

$$I(R) = [n(\rho\beta) - n(-\rho\beta)] \log \frac{1}{\beta} + r \int_{r/R}^{\alpha\beta} \varphi(r, t) dt + \theta(R),$$

$\theta(R)$ tendant vers zéro lorsque R tend vers l'infini puisque Λ est mesurable. En faisant tendre β vers 1, on a donc

$$I(R) = r \int_{r/R}^{\alpha} \varphi(r, t) dt + \theta(R);$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = r \int_0^{\alpha} \varphi(r, t) dt = |r| \int_0^1 \varphi(r, t) dt.$$

LEMME 3.2. — Soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite mesurable et soit

$$\Lambda_k = \Lambda - \{\lambda_k\};$$

on a

$$\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)| = \int_0^1 \left[\lambda_k \varphi(\lambda_k, t) + \frac{1}{1-t} \right] dt.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 3.1 à la suite Λ_k . En effet :

1° Si $\lambda_k > 0$ la fonction de densité de Λ_k est

$$D(t) \quad \text{pour} \quad t \leq \lambda_k,$$

$$D(t) - \frac{1}{t} \quad \text{pour} \quad t > \lambda_k;$$

2° Si $\lambda_k < 0$ la fonction de densité de Λ_k est

$$D(t) + \frac{1}{t} \quad \text{pour} \quad t < \lambda_k,$$

$$D(t) \quad \text{pour} \quad t \geq \lambda_k.$$

Revenons à la démonstration du théorème 3.1. Pour que la suite mesurable Λ soit une suite (P) il faut et il suffit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C'_\Lambda(\lambda_k) \lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)|}{\log |\lambda_k|} = \infty,$$

d'où le théorème 3.1 en vertu du lemme 3.2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BAILLETTE, Sur la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction presque périodique de spectre donné, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 258 (1964), 6049-6051.
- [2] V. BERNSTEIN, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, Paris (1933).
- [3] A. BEURLING and P. MALLIAVIN, On Fourier transforms of measures with compact support, *Acta Math.*, 108 (1962), 291-309.
- [4] R. P. BOAS, Entire functions, *Academic Press*, New-York (1954).
- [5] L. DE BRANGES, Bernstein Problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), n° 5, 825-832.
- [6] J. P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 5 (1953-1954), 39-130.
- [7] J. P. KAHANE, Mean periodic functions, *Tata Institute of Fundamental Research*, Bombay (1959).

- [8] J. P. KAHANE, Travaux de Beurling et Malliavin, *Séminaire Bourbaki* (1961), 62, n° 225, Paris.
- [9] P. KOOSIS, Sur la non totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (1958), 75 (3), 125-152.
- [10] B. IA LEVINE, Distribution des racines des fonctions entières (en russe), Moscou (1956).
- [11] B. IA LEVINE, Distribution of zeros of entire functions, *Amer. Math. Soc.* (1964).
- [12] P. MALLIAVIN, Spectre des fonctions moyennes périodiques. Totalité d'une suite d'exponentielles imaginaires sur un segment, *Séminaire Lelong* (1961), n° 11, Paris.

CHAPITRE II

SUR L'APPROXIMATION PONDÉRÉE PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES ET SUR UN PROBLÈME DE PROLONGEMENT

Nous nous proposons d'étudier deux problèmes très différents en utilisant les propriétés des suites (P) et des fonctions presque périodiques associées, qui ont été établies précédemment ([2]).

Le premier problème est relatif à l'approximation pondérée d'une fonction continue sur la droite par des polynômes ou des sommes d'exponentielles imaginaires. Nous généralisons ici un résultat obtenu par P. Koosis dans [5].

Le deuxième problème est l'étude du prolongement d'une fonction de deux variables indéfiniment dérivable dans un demi-plan fermé dont les dérivées successives satisfont certaines inégalités. Nous construisons ce prolongement par une méthode de [1] et, utilisant les propriétés des suites (P), nous établissons des inégalités satisfaites par les dérivées successives de la fonction prolongée dans tout le plan.

1. Application des suites (P) symétriques à l'approximation pondérée.

Nous utiliserons dans ce paragraphe, les mêmes notations que P. Koosis dans [5] :

Soit W une fonction (appelée poids) continue, positive, sur la droite réelle, telle que

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^n}{W(x)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$\mathcal{C}_W$ désigne l'espace des fonctions g continues sur la droite réelle, telles que

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left| \frac{g(x)}{W(x)} \right| = 0,$$

espace muni de la norme

$$\|g\| = \sup_x \left| \frac{g(x)}{W(x)} \right|.$$

Pour chaque $A > 0$, $\mathcal{C}_W(A)$ désigne le sous-espace fermé de $\mathcal{C}_W$ engendré par les exponentielles imaginaires e^{itx} , $|t| \leq A$. $\mathcal{C}_W(0)$ désigne le sous-espace fermé de $\mathcal{C}_W$ engendré par les polynômes. Enfin pour chaque $A \geq 0$, on pose

$$\mathcal{C}_W(A^+) = \bigcap_{A' > A} \mathcal{C}_W(A').$$

THÉORÈME 1.1. — *Pour chaque nombre $D \geq 0$ il existe un poids W (qui dépend de D), tel que*

$$\mathcal{C}_W(\pi D) \neq \mathcal{C}_W(\pi D^+) \neq \mathcal{C}_W.$$

Le théorème a été démontré par P. Koosis dans le cas $D = 0$ ([5]). Sa démonstration nous a inspiré celle du théorème 1.1. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1.1. — *Soit $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ une suite (P) symétrique. Il existe une fonction paire $W_\Lambda(x)$ telle que*

$$W_\Lambda(x) \geq 1 \tag{1.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^n}{W_\Lambda(x)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\log W_\Lambda(x)}{1+x^2} dx < \infty \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^2 W_\Lambda(\lambda_k)}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} < \infty. \tag{1.4}$$

Démonstration. — Soit (k_n) une suite croissante d'entiers positifs tendant vers l'infini, telle que $\lambda_{k_1} > \max(1, \lambda_1)$. Posons

$$\begin{aligned} W_\Lambda(x) &= \max(|C_\Lambda(x)|, x^n) && \text{pour } \lambda_{k_n} \leq x < \lambda_{k_{n+1}} \quad n = (1, 2, \dots) \\ W_\Lambda(x) &= W_\Lambda(\lambda_{k_1}) && \text{pour } 0 \leq x < \lambda_{k_1} \\ W_\Lambda(x) &= W_\Lambda(-x) && \text{pour } x < 0. \end{aligned}$$

D'après le choix de k_1 la condition (1.1) est satisfaite. En outre pour $x \geq \lambda_{k_{n+1}}$, on a

$$\frac{x^n}{W_\Lambda(x)} \leq \frac{1}{x},$$

et la condition (1.2) est satisfaite. Nous allons montrer que si la suite (k_n) est convenablement choisie les conditions (1.3) et (1.4) sont aussi remplies.

Soit l un nombre positif arbitraire et soit I_k l'intervalle $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ tel que $k_n \leq k < k_{n+1}$. Pour $|I_k| \leq l$ on a

$$\int_{I_k} \frac{\log W_\Lambda(x)}{1+x^2} dx \leq \int_{I_k} \frac{\log + |C_\Lambda(x)|}{1+x^2} dx + \int_{I_k} \frac{\log x^n}{1+x^2} dx,$$

la dernière intégrale étant majorée par

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_k) n \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2} \leq n l \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2}.$$

Pour $|I_k| > l$, soit $0 < h_k < \frac{l}{2}$; d'après [2], pour

$$\lambda_k + h_k \leq x \leq \lambda_{k+1} - h_k,$$

on a

$$|C_\Lambda(x)| \geq \frac{x^{n+1} h_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k - h_k)}{M_{n+1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)} \geq \frac{x^{n+1}}{M_{n+1}} \frac{h_k}{2} \geq x^n,$$

pourvu que l'on prenne $h_k = 2 M_{n+1} / \lambda_k$, ce qui est possible si k_n est assez grand. D'où :

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \frac{\log W_\Lambda(x)}{1+x^2} dx &\leq \int_{I_k} \frac{\log + |C_\Lambda(x)|}{1+x^2} dx + \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + h_k} \frac{\log x^n}{1+x^2} dx \\ &\quad + \int_{\lambda_{k+1} - h_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{\log x^n}{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

la somme des deux dernières intégrales étant majorée par

$$2 n h_k \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2} < n l \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2}.$$

On a donc dans tous les cas

$$\int_{\lambda_{k_n}}^{\lambda_{k_{n+1}}} \frac{\log W_\Lambda(x)}{1+x^2} dx \leq \int_{\lambda_{k_n}}^{\lambda_{k_{n+1}}} \frac{\log + |C_\Lambda(x)|}{1+x^2} dx + n l \sum_{k > k_n} \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2}.$$

On choisira k_n tel que

$$n \log \sum_{k > k_n} \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2} < \frac{1}{n^2};$$

la condition (1.3) sera satisfaite en vertu de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\log + |C_\Lambda(x)|}{1+x^2} dx.$$

On a enfin

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^2 W_\Lambda(\lambda_k)}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} < \sum_{n=1}^\infty \sum_{k > k_n} \frac{\lambda_k^{n+2}}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty,$$

pourvu que k_n soit assez grand, en vertu de la convergence des séries

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^n}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

la condition (1.4) est donc satisfaite.

Démonstration du théorème 1.1. — Soit $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ une suite (P) symétrique de densité D. Soit $\Lambda' = (\pm \lambda'_k)$ la suite symétrique telle que

$$\lambda'_k = \lambda_k \text{ pour } k > 1$$

$$0 < \lambda'_1 < \lambda_1.$$

Λ' est une suite (P) de densité D. Soit $W_{\Lambda'}$ la fonction associée à Λ' par le lemme 1.1 et posons

$$W(x) = x^2 W_{\Lambda'}(x) \text{ pour } \lambda_{k_n} \leq |x| \leq \lambda_{k_{n+1}} - \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$W(x) = W(\lambda_{k_1}) \text{ pour } |x| < \lambda_{k_1};$$

sur l'intervalle $[\lambda_{k_{n+1}} - \varepsilon_n, \lambda_{k_{n+1}}]$ prenons pour $W(x)$ la fonction linéaire qui coïncide avec $x^2 W_{\Lambda'}(x)$ aux extrémités de l'intervalle. $W(x)$ est une fonction continue qui satisfait les conditions (1.1), (1.2) et (1.3) si ε_n est choisi assez petit. En vertu de (1.3) on a d'après [5]

$$\mathcal{C}_W(\pi D^+) \neq \mathcal{C}_W.$$

Pour montrer que $\mathcal{C}_W(\pi D) \neq \mathcal{C}_W(\pi D^+)$, considérons la fonction $F(z) = z C_{\Lambda'}(z)$. C'est une fonction entière de type exponentiel, d'indicatrice $\pi D |\sin \theta|$; en outre

$$\left| \frac{F(x)}{W(x)} \right| \leq \frac{1}{|x|};$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left| \frac{F(x)}{W(x)} \right| = 0,$$

et $F(x)$ appartient à $\mathcal{C}_W(\pi D^+)$ d'après [5]. Il suffit de montrer qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}_W(\pi D)$.

Soit μ la mesure formée des masses $\pm \frac{W(\lambda_k)}{C'_\Lambda(\lambda_k)}$ portées par les

points $\pm \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$). En vertu de (1.4) μ est finie. En outre μ est orthogonale aux polynômes et aux exponentielles imaginaires e^{itx} telles que $|t| \leq \pi D$, car,

$$\int \frac{x_n}{W(x)} d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n - (-\lambda_k)^n}{C'_\Lambda(\lambda_k)} = i f \lambda^{(n)}(0) = 0$$

et

$$\int \frac{e^{itx}}{W(x)} d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{it\lambda_k} - e^{-it\lambda_k}}{C'_\Lambda(\lambda_k)} = i f_\Lambda(t) = 0$$

pour $|t| \leq \pi D$. Par contre la mesure μ n'est pas orthogonale à $F(x)$; en effet

$$\int \frac{F(x)}{W(x)} d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k) - F(-\lambda_k)}{C'_\Lambda(\lambda_k)} = 2 \frac{F(\lambda_1)}{C'_\Lambda(\lambda_1)} \neq 0;$$

$F(x)$ n'appartient donc pas à $\mathcal{C}_W(\pi D)$. Ceci achève de démontrer le théorème 1.1.

2. Application des suites (P)

à un problème de prolongement.

Soit f une fonction de deux variables réelles x et y , définie, indéfiniment dérivable pour $y \leq 0$. On se propose de prolonger f en une fonction indéfiniment dérivable dans tout le plan. Nous emploierons la méthode suivante qui a déjà été utilisée dans [1] :

Supposons d'abord f nulle pour $y \leq a < 0$. Soit (λ_k) une suite positive croissante tendant vers l'infini et (a_k) une suite de nombres réels. Posons pour $y > 0$

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f(x, -\lambda_k y).$$

La fonction obtenue prolonge la fonction donnée si l'on choisit (λ_k) et (a_k) de façon que

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-\lambda_k)^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, 0),$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^n = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Choisissons pour (λ_k) une suite (P) positive; la suite $(\lambda_k) \cup \{-1\}$ est une suite (P) de produit canonique associé

$$C(w) = (1 + w) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\lambda_k}\right).$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n}{C'(\lambda_k)} + \frac{(-1)^n}{C'(-1)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

Il suffira de poser

$$a_k = -\frac{C'(-1)}{C'(\lambda_k)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Remarquons que cette méthode s'applique aussi au cas où f est bornée pour $y \leq 0$ ainsi que toutes ses dérivées.

Dans le cas général nous appliquerons la méthode précédente à la fonction $F(x, y) = \alpha(y) f(x, y)$, α étant une fonction indéfiniment dérivable telle que

$$\alpha(y) = 0 \text{ pour } y \leq a$$

$$\alpha(y) = 1 \text{ pour } y \geq b, \text{ avec } a < b < 0.$$

On obtient :

THÉORÈME 2.1. — Soit (M_n) une suite positive croissante et supposons que

$$|D^n f(x, y)| \leq KM_n \text{ pour } y \leq 0 \text{ (resp. } a \leq y \leq 0) \text{ (} n = 0, 1, 2, \dots).$$

On peut prolonger f dans tout le plan de sorte que

$$|D^n f(x, y)| \leq K' M'_n \text{ pour } y > 0,$$

$M'_n = M_n n^{(2+\varepsilon)n}$ (resp. $M'_n = M_n n^{(3+\varepsilon)n}$) pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, ε étant une constante positive aussi petite que l'on voudra.

Démonstration. — Nous prendrons $\lambda_k = k^{2+\beta}$ $\beta > 0$.

1°) Soit $|D^n f(x, y)| \leq K M_n$ pour $y \leq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). On a, pour $y > 0$, d'après [3] (p. 66)

$$|D^n f(x, y)| \leq K M_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \lambda_k^n| < K K_1^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n M_n$$

d'où

$$|D^n f(x, y)| \leq K' M_n n^{(2+\varepsilon)n} \text{ pour } n \geq n_0(\varepsilon),$$

ε étant une constante positive qui tend vers zéro lorsque β tend vers zéro.

2°) Soit $|D^n f(x, y)| \leq K M_n$ pour $a \leq y < 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). On construit la fonction α de la manière suivante :

Considérons la suite (P) symétrique $\Gamma = (\pm k^{1+\beta})$ et la fonction presque périodique associée f_Γ . La fonction g telle que

$$g(t) = 0 \text{ pour } t \leq a \text{ et pour } t \geq b,$$

$$g(t) = f_\Gamma(t - a) f_\Gamma(t - b) \text{ pour } a < t < b,$$

est indéfiniment dérivable de support $[a, b]$. Nous posons

$$\alpha(y) = 1 + A \int_0^y g(t) dt,$$

la constante A étant choisie de façon que $\alpha(a) = 0$. D'après [3] (p. 66) on a pour $n \geq n_0(\varepsilon_1)$

$$|D^n f_\Gamma(t)| \leq n^{(1+\varepsilon_1)n};$$

d'où

$$|D^n \alpha(y)| = A \left| \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p D^p f_\Gamma(y - a) D^{n-1-p} f_\Gamma(y - b) \right| \leq A_1 n^{(1+\varepsilon_1)n}.$$

Pour $y \leq 0$

$$|D^n F(x, y)| \leq \sum_{p=0}^n C_n^p |D^p \alpha(y)| K M_{n-p} \leq K' M_n n^{(1+\varepsilon_2)n}.$$

Pour $y > 0$

$$|D^n f(x, y)| = |D^n F(x, y)| \leq K' M_n n^{(3+\varepsilon)n};$$

ε étant une constante positive qui tend vers zéro lorsque β tend vers zéro.

Nous n'avons pas pu améliorer ce résultat par un autre choix de la suite (λ_k) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ARONSZAJN, Potentiels besseliens, *Colloque intern. de théorie du potentiel* (1964).
- [2] A. BAILLETTE, Sur la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction presque périodique de spectre donné, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 258 (1964), 6049-6051.
- [3] J. P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 5 (1953-1954), 39-130.
- [4] J. P. KAHANE, Mean periodic functions, *Tata Institute of Fundamental Research Bombay* (1959).
- [5] P. KOOSIS, Sur l'approximation pondérée par des sommes d'exponentielles imaginaires (*à paraître*).

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1965).

AIMÉE BAILLETTE,
Service de Mathématiques,
Collège Scientifique Universitaire,
Perpignan, P.-O.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé :

Paris, le 5 avril 1965.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY.

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE.

